ÉRETTSÉGI VIZSGA ● 2011. május 3.

MATEMATIKA

KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI ÉRETTSÉGI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

NEMZETI ERŐFORRÁS MINISZTÉRIUM

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal** kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerül.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén elég a maximális pontszám beírása a megfelelő téglalapokba.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra.
5. Az ábrán kívül ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél **kevésbé részletezett**.
4. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
5. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel, mint kiinduló adattal helyesen számol tovább a következő gondolati egységben vagy részkérdésben, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
6. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.
7. Egy feladatra adott többféle helyes megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**.
8. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont**) nem adható**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. **A vizsgafeladatsor II. B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha mégsem derül ki egyértelműen, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladat lesz az, amelyet nem kell értékelni.

I.

1.		
Az egyszerűsítés utáni alak: $b+6$	2 pont	*A helyes szorzattá alakításért 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

2.		
(A képezhető háromjegyű számok száma:) 3!=6.	1 pont	
Ezek közül 2 páratlan.	1 pont	
Így a keresett valószínűség $\frac{2}{6}\left(=\frac{1}{3}\right)$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
A kocka térfogata 27-szeresére nő.	2 pont	*Ha a hasonló testek térfogatának arányára vonatkozó összefüggésre hivatkozik, 1 pont jár.*
Összesen:	**2 pont**	

4.		
A legnagyobb közös osztó: $2\cdot 5\cdot 11^3$ (=13 310)	1 pont	
A legkisebb közös többszörös: $2^3\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11^4\cdot 13$ (= 1 865 263 400)	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

5.		
f értékkészlete: $R_f=[-3;\,3]$.	1 pont	*Bármilyen módon megadott helyes válasz 1-1 pontot ér.*
g értékkészlete: $R_g=[-1;\,1]$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6.		
Az egyenlet gyökei: 7 és –0,5.	2 pont	*D>0 és a Viète-formulák alkalmazása 1-1-1 pont.*
A gyökök összege: 6,5. A gyökök szorzata: –3,5.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

7.		
$A=\{15;25;35;45;55;65;75;85;95\}$	1 pont	
$B=\{18;27;36;45;54;63;72;81;90;99\}$	1 pont	
$A\cap B=\{45\}$	1 pont	
$A\setminus B=\{15;25;35;55;65;75;85;95\}$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8.		
$x=2$	1 pont	
$y=-5$	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

9.		
A nagyobb szám betűjele: B (= cos 8π).	2 pont	*Ha helyesen megadja mindkét értéket, akkor 1 pontot kap.*
Összesen:	**2 pont**	

10.		
Az egyenlet megoldása a 9	1 pont	
és a -5.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

11.		
Az $a_1=2$ első tagú, $d=2$ differenciájú számtani sorozat felismerése.	1 pont	*Ha a szabályszerűséget felismeri (pl.: a_n= 2n) és helyesen válaszol, akkor is jár a teljes pontszám. Ha a sorozat első tagjának a nullát tekinti, akkor legfeljebb 2 pont adható.*
$a_{201}=2+200\cdot 2=$	1 pont	
$=402$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

12.		
A: hamis.	1 pont	
B: igaz.	1 pont	
C: hamis.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

II. A

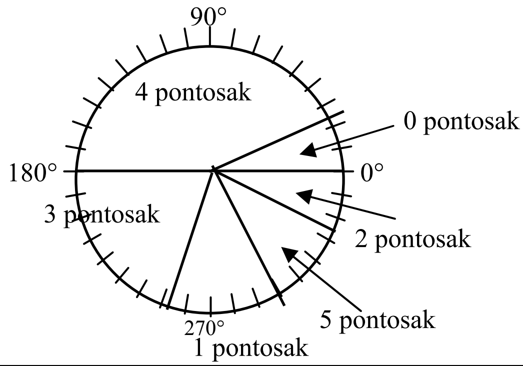
13. a)

	1. feladat	2. feladat
pontszámok átlaga	3,57	3,10
pontszámok mediánja	3,5	4

3 pont — *Minden helyes érték 1 pont.*

Összesen: 3 pont

13. b)

Egy tanulóhoz tartozó középponti szög: 12°.	1 pont	
13 tanulóhoz 156°, 6 tanulóhoz 72°, 4 tanulóhoz 48°, 3 tanulóhoz 36°, 2 tanulóhoz 24° tartozik.	1 pont	*4 helyes középponti szög esetén is jár az 1 pont.*
	2 pont	*Ha nincs jelmagyarázat a körcikkek mellett, akkor 1 pont adható.*
Összesen:	**4 pont**	

13. c)

Egy tanuló 3 pontot négyféleképpen érhetne el: 0+3; 1+2; 2+1; 3+0.	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
A diagram alapján nem valósulhat meg: 0+3 és 2+1.	1 pont	
1+2 pontot 1 tanuló kaphatott.	1 pont	
3+0 pontot 2 tanuló kaphatott.	1 pont	
Legfeljebb 3 tanuló érhetett el pontosan 3 pontot.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

14. a)		
A vezetési biztonság pontjai egy $t_0 = 90$, $q = 1{,}06$ hányadosú mértani sorozat tagjai.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
(Ebben a sorozatban) $t_5 = 90 \cdot 1{,}06^5$ (pont).	1 pont	
$90 \cdot 1{,}06^5 \approx 120{,}44$,	1 pont	
tehát 5 év után a vezetési biztonság 120 pontos.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

14. b) első megoldás		
Ha minden évben *x* %-kal csökken az autó értéke, akkor minden évben az előző évi érték $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$– szorosára változik.	1 pont	
Az 5. év leteltével: $2\,152\,000\left(1 - \frac{x}{100}\right)^5 = 900\,000$.	2 pont	
$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^5 = \frac{900}{2152} (\approx 0{,}4182)$,	1 pont	
$1 - \frac{x}{100} = \sqrt[5]{\frac{0{,}9}{2{,}152}} (\approx 0{,}8400)$,	1 pont	
$x \approx 16$.	2 pont	
Tehát évente 16 %-kal csökken az autó értéke.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

14. b) második megoldás		
Legyen a csökkenési ráta *x*.	1 pont	
Ekkor $2{,}152x^5 = 0{,}9$.	2 pont	
$x^5 = \frac{900}{2152} (\approx 0{,}4182)$,	1 pont	
amiből $x = \sqrt[5]{\frac{0{,}9}{2{,}152}}$,	1 pont	
$x \approx 0{,}84$,	1 pont	
$1 - 0{,}84 = 0{,}16$,	1 pont	
tehát évente 16 %-kal csökken az autó értéke.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

15. a)		
Az *ABC* háromszög egyenlő szárú.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
Az *AB* alapon fekvő hegyesszögek tangense $\frac{2}{3}$,	2 pont	
tehát az alapon fekvő szögek nagysága 33,7°,	1 pont	*Ha a helyesen kerekített szögek összege nem 180°, akkor 1 pont adható.*
a szárak szöge pedig 112,6°.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

15. b)		
A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek közös pontja, ez a szimmetria miatt az ordinátatengelyen van.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
Az *AC* oldal felezőmerőlegese átmegy a $(-1{,}5;1)$ felezőponton.	1 pont	
Az *AC* oldal felezőmerőlegesének egy normálvektora a $\overrightarrow{CA}$,	1 pont	
$\overrightarrow{CA}=(-3;2)$.	1 pont	
Az *AC* oldal felezőmerőlegesének egyenlete: $-3x+2y=6{,}5$.	1 pont	*A BC oldal felező merőlegesének egyenlete:* $3x+2y=6{,}5$.
Ez az *y* tengelyt a $(0;3{,}25)$ pontban metszi (ez a körülírt kör középpontja). A kör sugara 3,25.	1 pont	
A körülírt kör egyenlete: $x^2+(y-3{,}25)^2=3{,}25^2$.	1 pont	*A kör egyenlete írható így is:* $x^2+y^2-6{,}5y=0$.
Összesen:	**7 pont**	

II. B

16. a)		
Az első esetben a forgástengely a négyzet szemközti oldalainak közös felezőmerőlegese,	1 pont	*Ha ezek a gondolatok csak a megoldás során derülnek ki, akkor is járnak a pontok.*
a keletkező forgástest forgáshenger: alapkörének sugara 6 cm, magassága 12 cm.	1 pont	
Térfogata: $V_1 = 6^2 \cdot \pi \cdot 12$.	1 pont	
$V_1 = 432\pi \approx 1357\ \text{cm}^3$.	1 pont	*Ha a π közelítéséből adódóan 1356 cm³ a válasza, jár a pont.*
Felszíne: $A_1 = 2 \cdot 6^2 \cdot \pi + 2 \cdot 6 \cdot \pi \cdot 12$.	1 pont	
$A_1 = 216\pi \approx 679\ \text{cm}^2$.	1 pont	*Ha a π közelítéséből adódóan 678 cm² a válasza, jár a pont.*
Összesen:	**6 pont**	

16. b)		
A második esetben (mivel a négyzet átlói merőlegesen felezik egymást) a forgástest egy kettőskúp. A közös köralap átmérője a négyzet átlója, a kúpok magassága a négyzet átlóhosszának fele.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
A négyzet átlója: $d = 12 \cdot \sqrt{2}\ (\approx 17)$.	1 pont	
Az egyik kúp térfogata: $V_1 = \dfrac{\left(6\sqrt{2}\right)^2 \pi \cdot 6\sqrt{2}}{3}$,	1 pont	
azaz $V_1 = 144 \cdot \sqrt{2}\,\pi\ (\approx 640)$.	1 pont	
A két kúp egybevágó, így a kettőskúp térfogata: $V = 2V_1 \approx 1280\ \text{cm}^3$.	1 pont	*Közbülső kerekítések miatt kapott egyéb helyes eredmény (1275-1280-ig) is elfogadható.*
A forgáskúp palástja kiterítve körcikk, amelynek az ívhossza $2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi\,(\approx 17\pi \approx 53{,}4)$ (cm),	1 pont	
sugara 12 cm hosszú.	1 pont	
Így a területe: $T = \dfrac{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot 12}{2} = 72\sqrt{2}\,\pi\ (\approx 320\ cm^2)$.	1 pont	
A kettőskúp felszíne: $2T = 144\sqrt{2}\pi\left(\approx 640\ cm^2\right)$.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	

16. c)		
A kérdezett százalék: $\dfrac{2T}{A_1} \cdot 100\ \left(= \dfrac{144\sqrt{2}\,\pi}{216\pi} \cdot 100\right)$,	1 pont	
azaz kb. 94%.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

17. a)		
$\lg p_{\mathrm{m}} = 0{,}8 \cdot \lg 20 + 0{,}301$,	2 pont	*A feladat szövegében megadott képlet használatában elkövetett elvi hiba esetén ez a 3 pont nem jár.*
$\lg p_{\mathrm{m}} \approx 1{,}342$.	1 pont	
$p_{\mathrm{m}} \approx 22$ (Pa).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

17. b)		
$\lg 50 = 0{,}8 \cdot \lg p_{\mathrm{v}} + 0{,}301$.	2 pont	*A feladat szövegében megadott képlet használatában elkövetett elvi hiba esetén ez az 5 pont nem jár.*
$\lg p_{\mathrm{v}} = \dfrac{\lg 50 - 0{,}301}{0{,}8}$,	2 pont	
$\lg p_{\mathrm{v}} \approx 1{,}747$.	1 pont	
$p_{\mathrm{v}} \approx 56$ (Pa).	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

17. c)		
$p_v = p_m$ felismerése.	2 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a 2 pont.*
(Legyen a keresett nyomás $p_v = p_m = p$.) $\lg p = 0{,}8 \cdot \lg p + 0{,}301$,	2 pont	*Ez a 2 pont nem bontható.*
$\lg p = \dfrac{0{,}301}{0{,}2} = 1{,}505$.	2 pont	
$p \approx 32$ (Pa).	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	
Megjegyzés: Ha a vizsgázó felismeri, hogy 0,301 $\approx$ lg2, ezt felhasználva jut el a helyes eredményhez, megoldása teljes értékű.		

18. a) első megoldás		
Az 5 név bármelyike ugyanakkora valószínűséggel kerülhet az első helyre,	3 pont	
tehát a keresett valószínűség $\dfrac{1}{5} = 0{,}2$.	2 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. a) második megoldás		
A keresett p valószínűség a kedvező és az összes esetek számának hányadosa.	1 pont	*Ha ez a gondolat csak a megoldás során derül ki, akkor is jár a pont.*
Az összes esetek száma $5!$.	1 pont	
András neve 4! esetben állhat az első helyen (kedvező esetek száma).	2 pont	
$p = 0{,}2$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

18. b)

	A húzó neve :				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
A cédulák megfelelő sorrendjei	B	A	D	C	E
	B	C	D	A	E
	B	D	A	C	E
	C	A	D	B	E
	C	D	A	B	E
	C	D	B	A	E
	D	A	B	C	E
	D	C	A	B	E
	D	C	B	A	E

9 jó lehetőség 6 pont 8 jó lehetőség 5 pont 7 jó lehetőség 4 pont 6 jó lehetőség 3 pont 5 jó lehetőség 2 pont 4 jó lehetőség 1 pont		*Minden hibás sor (még valaki a saját nevét húzza) 2 pont „levonással” jár. Ismételten előforduló sort csak egyszer értékeljünk!*
Összesen:	**6 pont**	

18. c) első megoldás		
Azt a két helyet, ahol a fiúk ülhetnek (nem egymás mellett), 6-féleképpen választhatjuk ki.	1 pont	
Ennek indoklása (pl.: konkrétan leszámolja, vagy $\binom{5}{2} - 4 = 6$).	1 pont	
A két kiválasztott helyen a fiúk 2-féleképpen helyezkedhetnek el.	1 pont	
A lányok minden egyes esetben 3! = 6 különböző módon ülhetnek le egymáshoz képest.	1 pont	
Összesen tehát $6 \cdot 2 \cdot 6 =$	1 pont	
=72 különböző módon ülhetnek le.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

18. c) második megoldás		
(Komplementer halmazzal számolunk.) Az összes leülési lehetőség $5! = 120$.	1 pont	
Ezek között $2 \cdot 4! = 48$ olyan eset van, amelyben a két fiú egymás mellett ül.	3 pont	
Tehát $120 - 48 = 72$ olyan eset lehetséges, amelyben a két fiú nem ül egymás mellett.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	